पूर्ण-सङ्ख्याः

अध्यायः 2

2.1 भूमिका

वयं जानीमः यत् यदा वयं सङ्ख्यानां गणनस्य प्रारम्भं कुर्मः तदा 1, 2, 3, 4, ... इत्येतासां सङ्ख्यानां प्रयोगं कुर्मः। यदि गणनस्य प्रारम्भं कुर्मः तर्हि अस्माकं पुरतः स्वाभाविकरूपेण एताः एव सङ्ख्याः आगच्छन्ति। अत एव गणितज्ञाः एतासां सङ्ख्यानां कृते प्राकृतिक-सङ्ख्याः इति कथयन्ति।

पूर्ववर्तिनी अपि च परवर्तिनी सङ्ख्या

प्रदत्तायां प्राकृतिक-सङ्ख्यायां यदि 1 इति इमां सङ्ख्यां योजयामः तर्हि भवन्तः अग्रिमां प्राकृतिकसङ्ख्यां प्राप्तुं शक्नुवन्ति। अर्थात् भवन्तः तस्याः सङ्ख्यायाः परवर्तिनी प्राप्तुं शक्नुवन्ति।

16 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः परवर्तिनी सङ्ख्या $16 + 1 = 17$ इति अस्ति, 19 इत्यस्याः परवर्तिनी सङ्ख्या $19 + 1 = 20$ अस्ति। अनेन प्रकारेण अग्रे अपि प्रचलति।

16 सङ्ख्या 17 सङ्ख्यातः पूर्वम् आगच्छति। वयं कथयामः यत् 17 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या $17 – 1 = 16$ अस्ति, 20 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या $20 – 1 = 19$ अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. 19; 1997; 12000; 49; 100000; 2440701; 100199 अपि च 208090 एतासां पूर्ववर्तिनीं परवर्तिनीं च सङ्ख्यां लिखन्तु।
2. किं कापि प्राकृतसङ्ख्या अस्ति यस्याः पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या एव नास्ति ?
3. किं कापि प्राकृतसङ्ख्या अस्ति यस्याः परवर्तिनी सङ्ख्या एव नास्ति ? कापि अन्तिम-प्राकृतसङ्ख्या अस्ति किम्?

3 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः एका पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या अस्ति एका च परवर्तिनी सङ्ख्या अस्ति। 2 इत्यस्याः विषये भवन्तः किं चिन्तयन्ति ? अस्याः परवर्तिनी 3 अस्ति अपि च पूर्ववर्तिनी 1 अस्ति। किं 1 इत्यस्याः परवर्तिनी अपि च पूर्ववर्तिनी द्वयमपि अस्ति ?

वयम् अस्माकं विद्यालयस्य छात्राणां सङ्ख्यायाः गणनां कर्तुं शक्नुमः । वयं कस्मिन्नपि नगरे विद्यमानानां जनानां गणनाम् अपि कर्तुं शक्नुमः । वयं सम्पूर्ण-भारते विद्यमानानां जनानां गणनाम् अपि कर्तुं शक्नुमः । सम्पूर्ण-विश्वस्य जनानां गणनाम् अपि कर्तुं शक्नुमः । एवमपि स्यात् यत् आकाशे विद्यमानानां नक्षत्राणाम् अपि च अस्माकं शिरसि विद्यमान-केशानां गणनां कर्तुं प्रायः न शक्नुमः, यदि शक्नुमः तर्हि तस्यापि एका सङ्ख्या आवश्यकी भविष्यति। तस्यां स्थित्यां वयं दयोः मस्तकयोः विद्यमानान् केशान् योजयित्वां स्वीकर्तुं शक्नुमः ।

अधुना प्रायः एतत् स्पष्टमस्ति यत् बृहत्तम-प्राकृतसङ्ख्या नास्ति एव । प्राकृत-सङ्ख्याभिः सह कार्यकरण-सन्दर्भे उपरि उक्त-विचारान् विहाय इतोऽपि अन्यप्रश्नाः अस्माकं पुरतः आयान्ति। एवमेव भवन्तः अन्य-प्रश्नानां विषये चिन्तयितुं शक्नुवन्ति अपि च तेषां विषये मित्रैः सह चर्चां कर्तुं शक्नुवन्ति। किन्तु सर्वेषां प्रश्नानां समाधानं प्राप्तुं प्रायः न पारयन्ति।

2.2 पूर्ण-सङ्ख्याः

वयं तु दृष्टवन्तः यत् प्राकृतिक-सङ्ख्या 1 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या नास्ति एव। प्राकृतिक-सङ्ख्यानां सङ्ग्रहे वयं शून्यं 0, 1 इत्यस्याः पूर्ववर्तिनी-सङ्ख्या रूपेण स्थापयामः।

> प्राकृत-सङ्ख्याः शून्येन सह मिलित्वा पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहं कुर्वन्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. किं सर्वाः प्राकृतसङ्ख्याः पूर्ण-सङ्ख्याः अपि सन्ति ?
2. किं सर्वाः पूर्ण-सङ्ख्याः प्राकृतसङ्ख्याः अपि सन्ति ?
3. लघुतमा पूर्णसङ्ख्या का अस्ति ?
4. बृहत्तमा पूर्णसङ्ख्या का अस्ति ?

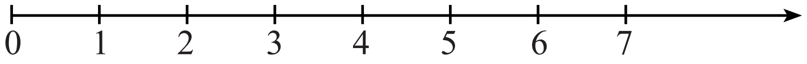
पूर्व-कक्ष्यासु भवन्तः पूर्ण-सङ्ख्याभिः सह यथा योगस्य,व्यवकलनस्य, गुणनस्य, विभाजनस्य अपि च सर्वविध-मूलभूतप्रक्रियाणां शिक्षणं प्राप्तवन्तः । इदमपि भवन्तः जानन्ति यत् एतादृश-प्रश्नानां समाधानं कर्तुं केन प्रकारेण अनुप्रयोगं कुर्मः इति। आयान्तु , एताः सङ्क्रियाः एकस्याः सङ्ख्यारेखायाः उपरि कुर्वन्तु। परन्तु प्रथमं तावत् सङ्ख्यारेखां जानन्तु।

2.3 सङ्ख्या-रेखा

एकां रेखाम् आलिखन्तु। तदुपरि एकं बिन्दुं स्थापयन्तु। अस्य बिन्दोः 0 इति नाम ददतु। 0 इत्यस्य

दक्षिणभागे पुनः एकं बिन्दुं स्थापयन्तु। तस्य 1 इति नाम ददतु। 0 अपि च 1 एतयोः मध्ये विद्यमानं दूरम् एक-मात्रात्मकम् इत्युच्यते। एवमेव 1 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः दक्षिणभागे एक-मात्रात्मके दूरे पुनः एकं बिन्दुं स्थापयित्वा तस्य 2 इति नाम प्रददतु। एवमेव अनेन विधिना एक-मात्रात्मक-दूरे सङ्ख्या-रेखायाः उपरि बिन्दूनां 3,4,5,... इति नामाङ्कनं कुर्वन्तु। भवन्तः दक्षिण-भागे यावत्-पर्यन्तम् अपि पूर्ण-सङ्ख्याः लेखितुं शक्नुवन्ति।

अधोभागे प्रदत्त-रेखा पूर्णसङ्ख्यानां कृते सङ्ख्या-रेखा अस्ति।



बिन्दोः 2 अपि च 4 इत्यनयोः मध्ये कियद् अन्तरालम् अस्ति ? निश्चयेन एतद् अन्तरालं द्विमात्रात्मकम् अस्ति। किं भवन्तः बिन्दोः 2 अपि च 6, अपि च 2 अपि च 7 इत्यनयोः मध्ये विद्यमानम् अन्तरालं सूचयितुं शक्नुवन्ति ?

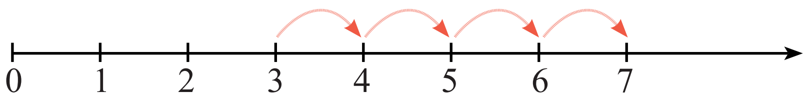
सङ्ख्या-रेखायां भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् 7 सङ्ख्या 4 सङ्ख्यायाः दक्षिणतः अस्ति। अपि च 7 सङ्ख्या 4 सङ्ख्यापेक्षया बृहती अस्ति। अर्थात् $7 > 4$ अस्ति। 8 सङ्ख्या 6 सङ्ख्यायाः दक्षिणतः अस्ति। अर्थात् $8 > 6$ अस्ति। एतत् आधारीकृत्य वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णसङ्ख्याद्वये सा एव बृहती भवति या सङ्ख्या सङ्ख्या-रेखायाम् अन्यसङ्ख्यायाः दक्षिणभागे भवति। वामभागे या पूर्णसङ्ख्या भवति सा लघ्वी भवति। उदाहरणार्थं, $4 < 9$ अस्ति ; 4 सङ्ख्या 9 सङ्ख्यायाः वामभागे अस्ति। एवमेव $12 > 5$ अस्ति ; 12 सङ्ख्या 5 सङ्ख्यायाः दक्षिणतः अस्ति।

भवन्तः 10 अपि च 20 इत्येतयोः विषये किं वक्तुं प्रभवन्ति ?

सङ्ख्या-रेखायां 30, 12, 18 इत्येतासां स्थितिं पश्यन्तु। का सङ्ख्या अतीव वामतः अस्ति ? किं भवन्तः 1005 अपि च 9756 एतयोः संख्ययोः मध्ये का सङ्ख्या अन्यापेक्षया दक्षिणभागे अस्ति ? सङ्ख्यारेखायां 12 सङ्ख्यायाः परवर्तिनीं 7 सङ्ख्यायाः पूर्ववर्तिनीं च दर्शयन्तु।

सङ्ख्या-रेखायाः उपरि योगः

पूर्ण-सङ्ख्यानां योगं सङ्ख्या-रेखायां दर्शयन्ति। आयान्तु 3 अपि च 4 इत्येतयोः योगं पश्यन्तु।

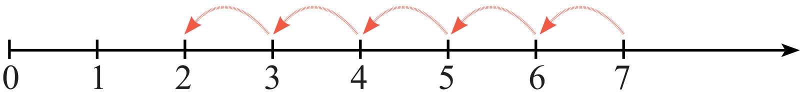


शरस्य प्रान्तभागे बिन्दुः 3 अस्ति। 3 सङ्ख्या प्रारम्भं कुर्वन्तु। यतः अस्यां सङ्ख्यायां 4 सङ्ख्यां योजनीयम् अस्ति। अतः वयं दक्षिणभागे 3 सङ्ख्यातः आरभ्य चत्वारि पदानि 4, 5, 6, 7 पर्यन्तं चलामः यथा उपरि दर्शितमस्ति। चतुर्थ-पदस्य अन्तिम-शरस्य प्रान्ते बिन्दुः 7 अस्ति। अनेन प्रकारेण 3 अपि च 4 इति एतयोः योगः 7 अस्ति।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

सङ्ख्या-रेखायाः प्रयोगं कृत्वा $4 + 5$; $2 + 6$; $3 + 5$ अपि च $1+ 6$ एतासां सङ्क्रियाणां समाधानं कुर्वन्तु।

व्यवकलनम् : द्वयोः पूर्णसंख्ययोः व्यवकलनम् अपि सङ्ख्या-रेखायाः उपरि दर्शयितुं शक्यते । आयान्तु 7 – 5 अभिजानन्तु ।

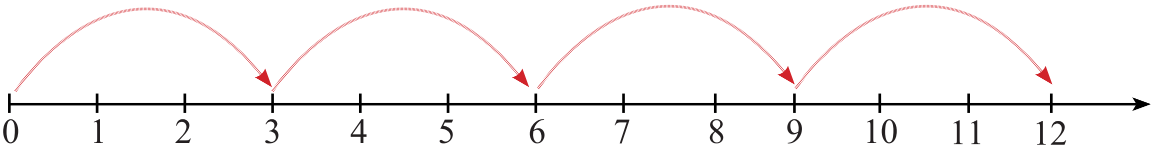


शरस्य प्रान्ते बिन्दुः 7 अस्ति । यतः 5 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः व्यवकलनं करणीयम् । अतः वयं पञ्चपदानि वामभागे चलामः । वयं 2 बिन्दुं प्राप्नुमः । वयं 7 – 5 = 2 इति प्राप्नुमः ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

सङ्ख्या-रेखायाः प्रयोगं कृत्वा 8 – 3 ; 6 – 2 अपि च 9 – 6 एतासां सङ्क्रियाणां समाधानं प्राप्नुवन्तु कुर्वन्तु ।

गुणनम् : अधुना वयं सङ्ख्या-रेखायाः उपरि पूर्ण-सङ्ख्यानां गुणनं पश्यामः ।



आयान्तु 4 x 3 अभिजानन्तु ।

0 सङ्ख्यातः प्रारम्भं कुर्वन्तु अपि च दक्षिणभागे 3 मात्रात्मकं पदं चतुर्वारं चलन्तु । भवन्तः कं बिन्दुं प्राप्नुवन्ति ? भवन्तः 12 बिन्दुं प्राप्नुवन्ति । अतः वयं कथयामः यत् 4 x 3 = 12 अस्ति ।

प्रयत्नं कुर्वन्तु

सङ्ख्या-रेखायाः प्रयोगं कृत्वा 2 x 6 ; 3 x 3 अपि च 4 x 2 एतासां सङ्क्रियाणां समाधानं कुर्वन्तु ।

अभ्यासः 2.1

1. 10999 इति अस्याः अनन्तरं अग्रिमं प्राकृत-सङ्ख्यात्रयं लिखन्तु ।
2. 10001 इत्यस्याः सङ्ख्यायाः पूर्वतनं पूर्ण-सङ्ख्यात्रयं लिखन्तु ।
3. लघुतमा पूर्णसङ्ख्या का अस्ति ?
4. 32 अपि च 53 इत्येतयोः मध्ये कति पूर्णसङ्ख्याः सन्ति ?
5. अधोलिखितानां परवर्तिनीं सङ्ख्यां लिखन्तु ।

   (a) 2440701 (b) 100199 (c) 1099999 (d) 2345670
6. अधोलिखितानां पूर्ववर्तिनीं सङ्ख्यां लिखन्तु ।

   (a) 94 (b) 10000 (c) 208090 (d) 7654321
7. सङ्ख्यानाम् अधोलिखितानां युग्मानां प्रत्येकम् अपि सङ्ख्यायाः कृते सङ्ख्या-रेखायाः उपरि कीदृशी पूर्णसङ्ख्या अन्यसङ्ख्यायाः वामभागे अस्ति । एतयोः मध्ये उपयुक्तानां चिह्नानां (>, <) प्रयोगमपि कुर्वन्तु ।

(a) 530, 503 (b) 370, 307
(c) 98765, 56789 (d) 9830415, 10023001

8. अधोलिखितेषु कथनेषु किं कथनं सत्यं किं कथनम् असत्यं इति लिखन्तु।

(a) शून्यम् इति लघुतमा प्राकृतसङ्ख्या अस्ति।

(b) 400 सङ्ख्या, 399 इति सङ्ख्यायाः पूर्ववर्तिनी अस्ति।

(c) शून्यं लघुतमा पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

(d) 600 सङ्ख्या, 599 सङ्ख्यायाः परवर्तिनी अस्ति।

(e) सर्वाः प्राकृतसङ्ख्याः पूर्णसङ्ख्याः एव सन्ति।

(f) सर्वाः पूर्णसङ्ख्याः प्राकृतसङ्ख्याः एव सन्ति।

(g) अङ्कद्वयात्मिकायाः पूर्णसङ्ख्यायाः पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या कदापि एक-अङ्कात्मिका न भवितुं शक्नोति।

(h) 1 लघुतमा पूर्णसङ्ख्या अस्ति।

(i) प्राकृतसङ्ख्यायाः 1 इत्यस्याः कापि पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या नास्ति।

(j) पूर्णसङ्ख्यायाः 1 इत्यस्याः कापि परवर्तिनी सङ्ख्या नास्ति।

(k) पूर्णसङ्ख्या 13 इति, 11-12 इति अनयोः संख्ययोः मध्ये स्थिता अस्ति।

(l) पूर्णसङ्ख्यायाः 0 इत्यस्याः कापि पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या नास्ति।

(m) अङ्कद्वयात्मिकायाः सङ्ख्यायाः परवर्तिनी सङ्ख्या सदैव अङ्कद्वयात्मिका एका सङ्ख्या भवति।

2.4 पूर्णसङ्ख्यानां गुणाः

यदा वयं सावधानं पूर्णसङ्ख्यानाम् उपरि जायमानां विभिन्नप्रक्रियाणां निरीक्षणं कुर्मः तदा तासु अनेकगुणाः दृश्यन्ते। एतैः गुणैः वयम् उत्तमप्रकारेण सङ्ख्यानां विषये अवगन्तुं साहाय्यं प्राप्नुमः। अनेन सह एव, एते गुणाः बहूनां सङ्क्रियाणां सरलीकरणमपि कुर्वन्ति।

एतत् कुर्वन्तु

भवतः कक्ष्यायाः प्रत्येकं छात्रं कामपि अङ्कद्वयात्मिकां पूर्णसङ्ख्यां स्वीकृत्य तयोः योगं कर्तुं वदन्तु। किं फलितांशः सर्वदा एका पूर्णसङ्ख्या एव भवति ? योगः अनेन प्रकारेण भवितुम् अर्हति।

7	+	8	=	15, एका पूर्णसङ्ख्या
5	+	5	=	10, एका पूर्णसङ्ख्या
0	+	15	=	15, एका पूर्णसङ्ख्या
.	+	.	=	...
.	+	.	=	...

एवमेव इतोऽपि पूर्णसङ्ख्यानां पञ्चयुग्मान् स्वीकृत्य योगं कुर्वन्तु। किं योगः सदैव एका पूर्णसङ्ख्या अस्ति ?

किं भवन्तः कमपि तादृशं युग्मं प्राप्तवन्तः, यस्य योगः एका पूर्णसङ्ख्या नास्ति ? एतादृशयोः पूर्णसङ्ख्याद्वययोः प्राप्तिः भवितुं न शक्यते, ययोः योगः एका पूर्णसङ्ख्या भवितुं नार्हति। वयं वदामः यत् द्वयोः पूर्णसंख्ययोः योगः एका पूर्णसङ्ख्या एव भवति। यतः पूर्णसङ्ख्यानां योगेन पूर्णसङ्ख्या एव प्राप्यते। अतः पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः योगस्य अन्तर्गतः संवृतः अस्ति। इदमेव पूर्णसङ्ख्यानां योगस्य संवृतगुणः इति कथयन्ति।

किं पूर्णसङ्ख्याः गुणनस्य अन्तर्गताः संवृताः अपि सन्ति ? भवन्तः कथम् अस्य समाधानस्य अन्वेषणं कुर्वन्ति ?

अनेन प्रकारेण गुणनं कर्तुं शक्यते।

7	X	8	=	56, एका पूर्णसङ्ख्या
5	X	5	=	25,एका पूर्णसङ्ख्या
0	X	15	=	0,एका पूर्णसङ्ख्या
.	X	.	=	...
.	X	.	=	...

द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलमपि एका पूर्णसङ्ख्या एव भवति। अतः वयं वक्तुं शक्नुमः यत् पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः गुणनस्य अन्तर्गतः संवृतः अस्ति।

संवृतः गुणः – पूर्णसङ्ख्याः योग-गुणनयोः अन्तर्गतः संवृतः अस्ति।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु, लिखन्तु च।

1. पूर्णसङ्ख्याः व्यवकलनस्य अन्तर्गतसंवृताः न भवन्ति। किमर्थम् ? व्यवकलनम् अनेन प्रकारेण भवितुम् अर्हति।

6	–	2	=	4, एका पूर्णसङ्ख्या
7	–	8	=	?, एका पूर्णसङ्ख्या न
5	–	4	=	1, एका पूर्णसङ्ख्या
3	–	9	=	?, एका पूर्णसङ्ख्या न

भवतां पक्षतः इतोऽपि अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य उपरि उक्त-कथनं पुष्टीकुर्वन्तु।

2. किं पूर्णसङ्ख्याः विभजनस्य अन्तर्गताः संवृताः सन्ति ? नैव। अधोलिखित-सारिणीं पश्यन्तु।

8	÷	4	=	2, एका पूर्णसङ्ख्या
5	÷	7	=	5/7, एका पूर्णसङ्ख्या न
12	÷	3	=	4, एका पूर्णसङ्ख्या

6	÷	5	=	6/5, एका पूर्णसङ्ख्या न

भवतां पक्षतः इतोऽपि अन्यानि उदाहरणानि स्वीकृत्य उपरि उक्त-कथनं पुष्टीकुर्वन्तु।

शून्यद्वारा विभाजनम्

एकस्याः सङ्ख्यायाः विभाजनम् इत्यस्य अर्थः अस्ति यत् तस्याः सङ्ख्यायाः पुनः पुनः व्यवकलनम् इति।

आयान्तु 8 ÷ 2 जानन्तु।

अष्टसङ्ख्यातः सङ्ख्याद्वयं पुनः पुनः वियोज्यताम्।

	8		
-	2	…… 1	
	6		कतिवारं व्यवकलिते सति वयं 0 पर्यन्तं
-	2	…… 2	प्राप्तवन्तः? चतुर्वारम्।
	4		अतः वयं 8 ÷ 2 = 4 इति लिखामः।
-	2	…… 3	
	2		
-	2	…… 4	
	0		

अनेन विधिना 24 ÷ 8 अपि च 16 ÷ 4 इमां सङ्क्रियां जानन्तु।

आयान्तु अधुना 2 ÷ 0 इमां सङ्क्रियां ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः।

	2		
-	0	…… 1	
	2		प्रतिवारं व्यवकलनेन वयं 2 सङ्ख्यां
-	0	…… 2	प्राप्नुमः। किं एषा प्रक्रिया कदाचित् समाप्तिं
	2		यास्यति ? नैव।
-	0	…… 3	**अतः वयं 2 ÷ 0 इति परिभाषिता नास्ति इति**
	2		**वदामः।**
-	0	…… 4	

आयान्तु अधुना 7 ÷ 0 इमां सङ्क्रियां ज्ञातुं प्रयत्नं कुर्मः।

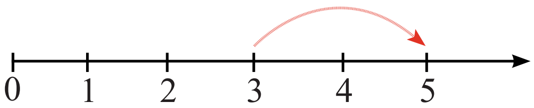
	7		व्यवकलनस्य कस्मिन्नपि स्तरे शून्यस्य (0)
-	0	…… 1	प्राप्तिः न भवति।
	7		**अतः वयं 7 ÷ 0 अस्याः परिभाषा नास्ति इति**
-	0	…… 2	**वदामः।**
	7		5 ÷ 0 अपि च 16 ÷ 0 एतयोः कृते अपि अस्य
-	0	…… 3	परीक्षणं कुर्वन्तु।

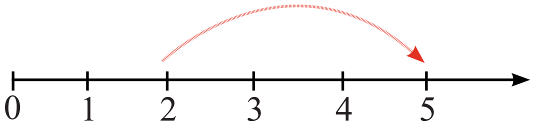
7

पूर्णसङ्ख्यानां शून्येन विभाजनं परिभाषितं नास्ति।

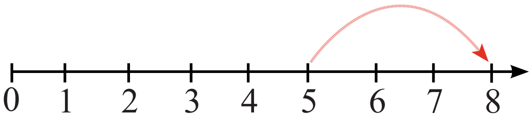
योगस्य अपि च गुणनस्य क्रमविनिमयता

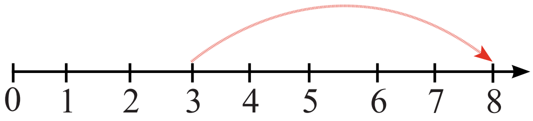
सङ्ख्या-रेखायाः अधोलिखितं चित्रं किं दर्शयति ? स्थितिद्वये अपि वयं 5 सङ्ख्यां प्राप्नुमः।





अतः 3 + 2 अपि च 2 + 3 एतत् द्वयम् अपि समानम् अस्ति। उभाभ्यां 5 इति उत्तरं प्राप्यते।
अनेन प्रकारेण 5 + 3 अपि च 3 + 5 एतत् द्वयमपि समानम् अस्ति।



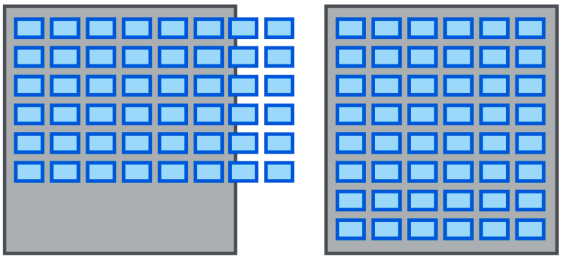


अनेन प्रकारेण 4 + 6 अपि च 6 + 4 इत्यनयोः अपि एवमेव कर्तुं प्रयत्नं कुर्वन्तु। किम् एतत् तदा अपि सत्यं भविष्यति ? यदा यदा वयं द्वयोः पूर्णसंख्ययोः योगं कुर्मः तदा सर्वदा संख्ययोः क्रमविनिमयेन अपि योगस्य फलं समानं भवति।

> भवन्तः पूर्णसङ्ख्याद्वयं केनापि क्रमेण योजयितुं शक्नुवन्ति।

वयं वदामः यत् पूर्णसङ्ख्यानां कृते योगः क्रमविनिमयः अस्ति। अमुमेव गुणं योगस्य क्रमविनिमयता इति वदामः।

मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु।



भवतां गृहे कश्चन प्रीतिभोजकार्यक्रमः अस्ति। भवन्तः बान्धवानां कृते आसन्दानां 6 पङ्क्तिषु स्थापयन्ति यस्यां प्रत्येकं पङ्क्तौ 8 आसन्दाः सन्ति। प्रकोष्ठः तावान् विशालः नास्ति यत्र आसन्दानां 8 पङ्क्तीनां स्थापनं कर्तुं शक्यते। भवन्तः इत्थं चिन्तयन्तु यत् 8 पङ्कतीः स्थापयामः यत्र प्रत्येकं पङ्क्तौ 6 आसन्दाः भवेयुः इति। तथा कर्तुं भवतां कृते इतोऽपि अधिकाः आसन्दाः अपेक्षन्ते किम् ?

किं गुणनस्यापि क्रमविनिमयता-गुणः भवति ? संख्ययोः 4 अपि च 5 एतयोः गुणनं भिन्न-भिन्न-क्रमेण कुर्वन्तु। भवन्तः द्रक्ष्यन्ति यत् 4 x 5 = 5 x 4 अस्ति।
किम् इदं 3 x 6 अपि च 5 x 7 इत्यत्रापि सत्यम् अस्ति ?

भवन्तः केनापि क्रमेण द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनं कर्तुं शक्नुवन्ति।

वयं वदामः यत् पूर्णसङ्ख्यानां कृते गुणनं क्रमविनिमयः अस्ति।

इत्थं च **पूर्णसङ्ख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य क्रमविनिमयता अस्ति।**

परीक्षणं कुर्वन्तु।

i) पूर्णसङ्ख्यानां कृते व्यवकलनस्य क्रमविनिमयता नास्ति। सङ्ख्यानां विभिन्नं युग्मत्रयं स्वीकृत्य अस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

ii) किं $6 \div 3$ अपि च $3 \div 6$ एतत् द्वयमपि समानम्?

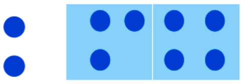
पूर्णसङ्ख्यानां इतोऽपि कान्चन युग्मान् स्वीकृत्य स्व-उत्तरान् पुष्टीकुर्वन्तु।

योगस्य अपि च गुणनस्य सहचारिता

अधोलिखितानि चित्राणि पश्यन्तु।

(a) $(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

(b) $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$



उपरि, (a) इत्यस्य अनुसारेण भवन्तः प्रथमतया 2,3 इत्यनयोः योगेन सह 4 इत्यस्य योगं कर्तुं शक्नुवन्ति।

एवमेव (b) इत्यस्य अनुसारेण भवन्तः प्रथमतया 3,4 इत्यनयोः योगेन सह 2 इत्यस्य योगं कर्तुं शक्नुवन्ति।

किं द्वयोः फलितांशः समानः नास्ति?

वयम् इदमपि प्राप्नुमः यत्

$(5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15$ तथा $5 + (7+ 3) = 5 + 10 = 15$ अस्ति।

अतः $(5 + 7) + 3 = 5 + (7+ 3)$ अभवत्।

एषः एव गुणः पूर्णसङ्ख्यानां योगस्य साहचर्य-गुणः इत्युच्यते।

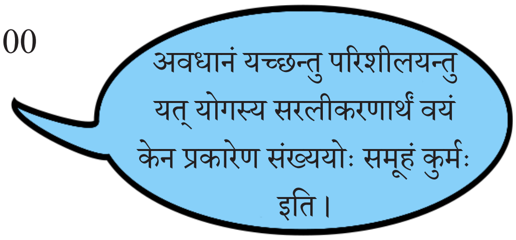
सङ्ख्याः 2, 8, अपि च 6 एतासां कृते अस्य गुणनस्य परीक्षणं कुर्वन्तु।

उदाहरणम् 1 : सङ्ख्याः 234, 197 अपि च 103 इत्येतासां योगं कुर्वन्तु।

समाधानम् : $234 + 197 + 103 = 234 + (197 + 103)$

$= 234 + 300$

$= 534$



क्रीडां क्रीडन्तु।

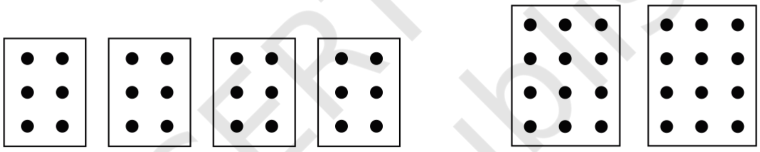
भवन्तः मित्रैः सह इमां क्रीडां क्रीडितुं शक्नुवन्ति।

भवन्तः 1 सङ्ख्यातः 10 पर्यन्तं कामपि सङ्ख्यां वदन्तु । अधुना भवतां मित्रम् तया संख्यया सह 1 सङ्ख्यातः 10 पर्यन्तं कामपि सङ्ख्यां योजयति । पुनः भवतां क्रमः अस्ति । अपि च पुनः पुनः द्वौ मिलित्वा क्रमेण क्रीडन्तु । यः पूर्वं 100 सङ्ख्यां प्राप्नोति सः विजयशाली विजयी भविष्यति । यदि भवन्तः एव सर्वदा विजयशालिनः भवितुम् इच्छन्ति तर्हि भवतां युक्तिः कथं भवेत् ?

(a) (b)

अधोलिखितासु आकृतिषु प्रदर्शितं गुणनतथ्यं पश्यन्तु । (आकृतिः 2.1)

(a) अपि च (b) इत्येतयोः बिन्दूनां सङ्ख्यां गणयन्तु । भवन्तः किं प्राप्नुवन्ति ? द्वयोः अपि बिन्दूनां सङ्ख्या समाना अस्ति । (a) इत्यत्र प्रत्येकं कोष्ठके 2 x 3 बिन्दवः सन्ति । अतः आहत्य बिन्दूनां सङ्ख्या (2 x 3) x 4 = 24 अस्ति ।



(a) (b)

आकृतिः 2. 1

(b) इत्यत्र प्रत्येकं कोष्ठके 3 x 4 बिन्दवः सन्ति । अतः आहत्य बिन्दूनां सङ्ख्या 2 x (3 x 4) = 24 अस्ति । अपि च (2 x 3) x 4 = 2 x (3 x 4) अस्ति । अनेन प्रकारेण भवन्तः द्रष्टुं शक्नुवन्ति यत् (3 x 5) x 4 = 3 x (5 x 4) अस्ति ।

अमुमेव पूर्णसङ्ख्यानां गुणनस्य साहचर्य-गुणः इति वदामः ।

चिन्तयन्तु, इत्थम् अभिजानन्तु च ।

कीदृशं गुणनं सरलम् अस्ति ? किमर्थं कुतः सरलम् अस्ति ?

(a) (6 x 5) x 3 अथवा 6 x (5 x 3)

(b) (9 x 4) x 25 अथवा 9 x (4 x 25)

उदाहरणम् 2 : 14 + 17 + 6 इमां सङ्क्रियां विधिद्वयेन अभिजानन्तु ।

समाधानम् : 14 + 17 + 6 = (14 + 17) + 6 = 31 + 6 = 37

$14 + 17 + 6 = 14 + (17 + 6) = 14 + 23 = 37$

अत्र भवन्तः योगस्य साहचर्य-गुणस्य अपि च क्रमविनिमयतागुणस्य च संयोजनस्य प्रयोगं कृतवन्तः। किं भवन्तः चिन्तयन्ति यत् क्रमविनिमय-साहचर्यगुणयोः प्रयोगेन परिकलनं सरलं भवति इति ?

प्रयत्नं कुर्वन्तु

$7 + 18 + 13$ अपि च $16 + 12 + 4$ इमां सङ्क्रियाम् अभिजानन्तु।

गुणनस्य साहचर्यनियमः अधोलिखितप्रश्नानां समाधाने उपयोगी भवति।

उदाहरणम् 3 : 12×35 इमां सङ्क्रियां जानन्तु।

समाधानम् : $12 \times 35 = (6 \times 2) \times 35 = 6 \times (2 \times 35) = 6 \times 70 = 420$

अस्मिन् उदाहरणे वयं लघुतमां समसङ्ख्यां 5 सङ्ख्यायाः गुणजेन गुणनं कृत्वा सरलतया उत्तरं प्राप्तुं साहचर्य-गुणस्य उपयोगं कृतवन्तः।

उदाहरणम् 4 : $8 \times 1769 \times 125$ इमां सङ्क्रियां जानन्तु।

समाधानम् : $8 \times 1769 \times 125 = 8 \times 125 \times 1769$ (भवन्तः अत्र कस्य गुणस्य प्रयोगं कुर्वन्तः सन्ति?)

$= (8 \times 125) \times 1769 = 1000 \times 1769 = 1769000$

प्रयत्नं कुर्वन्तु

अभिजानन्तु।

$25 \times 8358 \times 4$; $625 \times 3759 \times 8$

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु।

किं $(16 \div 4) \div 2 = 16 \div (4 \div 2)$ अस्ति ?

किं विभाजनस्य कृते अपि साहचर्य-गुणस्य अन्वयः भवति ? नास्ति।

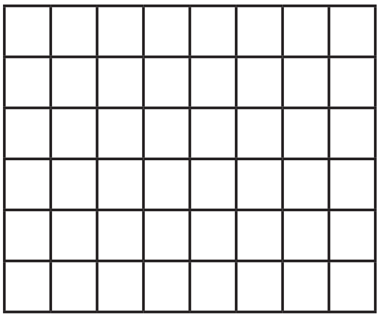
मित्रैः सह चर्चां कुर्वन्तु। किं $(28 \div 14) \div 2$ अपि च $28 \div (14 \div 2)$ एतत् द्वयमपि समानम् ?

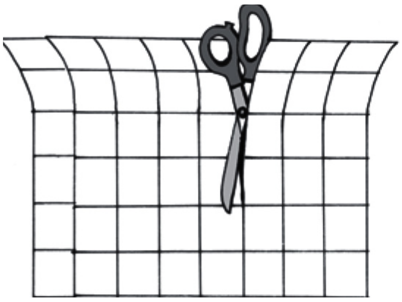
एतत् कुर्वन्तु

योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणम्

6 सेमी x 8 सेमी मापस्य एकं एकम् आलेखपत्रं लिखन्तु यत्र 1 सेमी x 1 सेमी मापस्य वर्गः स्यात्।

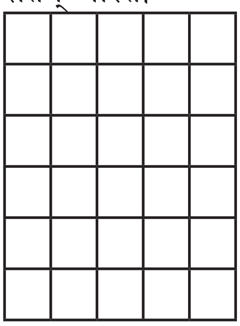
भवतां समीपे आहत्य कति वर्गाः सन्ति ?

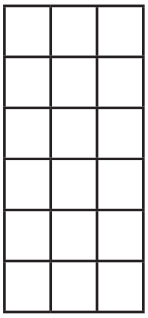




किं एषा सङ्ख्या 6 x 8 अस्ति ?

अधुना एतत् पत्रं 6 सेमी x 5 सेमी अपि च 6 सेमी x 3 सेमी मापस्य भागद्वयं कुर्वन्तु । यथा चित्रे प्रदर्शितम् अस्ति।





वर्गाणां सङ्ख्या : किम् एतत् 6 x 5 अस्ति ?

वर्गाणां सङ्ख्या : किम् एतत् 6 x 3 अस्ति ?

भागद्वये आहत्य कति वर्गाः सन्ति ?

किम् एतत् (6 x 5) + (6 x 3) अस्ति ? किम् अस्य अर्थः 6 x 8 = (6 x 5) + (6 x 3) एवम् अस्ति ?

किन्तु, 6 x 8 = 6 x (5 + 3) अस्ति । किम् इदं दर्शयति यत् 6 x (5 + 3) = (6 x 5) + (6 x 3)

एवमेव भवन्तः प्राप्नुवन्ति यत् 2 x (3 + 5) = (2 x 3) + (2 x 5) अस्ति ।

अमुमेव गुणं योगस्य उपरि गुणनस्य वितरण-गुणः इति वदामः ।

वितरण-गुणस्य प्रयोगद्वारा 4 x (5 + 8) ; 6 x (7 + 9) अपि च 7 x (11 + 9) एतत् सर्वम् अभिजानन्तु ।

चिन्तयन्तु, चर्चां कुर्वन्तु अपि च लिखन्तु ।

अधुना अधोलिखित-गुणनप्रक्रियां पश्यन्तु अपि च चर्चां कुर्वन्तु यत् किं वयं सङ्ख्यानां गुणनसमये योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणगुणस्य प्रयोगं कुर्मः ?

425		
X 136		
2550	425 x 6	(6 एककैः गुणनम्)
12750	425 x 30	(3 दशकैः गुणनम्)
42500	425 x 100	(1 शतकैः गुणनम्)
57800	425 x (6 + 30 + 100)	

उदाहरणम् 5 : एकस्य विद्यालयस्य उपाहारगृहे प्रतिदिनं भोजनार्थं 20 रुप्यकाणि अपि च क्षीरार्थं 4 रूप्यकाणि स्वीकुर्वन्ति। तर्हि भवन्तः 5 दिनेषु आहत्य कियतः धनस्य व्ययं कुर्वन्ति ?

समाधानम् : अमुं प्रश्नं विधिद्वयेन समाधातुं शक्नुमः।

विधि 1 : भोजनार्थं 5 दिनानां धनराशिं जानन्तु।

क्षीरार्थं 5 दिनानां धनराशिं जानन्तु।

पुनः द्वयोः योजनं कुर्वन्तु।

भोजनस्य मूल्यम् = 5 x 20 रू.

क्षीरस्य मूल्यम् = 5 x 4 रू.

आहत्य मूल्यम् = (5 x 20) रू + (5 x 4) रू = (100 + 20) रू

= 120 रू

विधि 2 : एकस्य दिनस्य आहत्य धनराशिं जानन्तु।

पुनः तं 5 इत्यनेन गुणनं कुर्वन्तु।

एकस्य दिनस्य (भोजनम् + क्षीरम्) आहत्य मूल्यम् = (20 x 4) रू

5 दिनानां आहत्य मूल्यम् = 5 x (20 + 4) रू = (5 x 24) रू

= 120 रू

इदम् उदाहरणं दर्शयति यत्

5 x (20 + 4) = (5 x 20) + (5 x 4) अस्ति।

एषः एव योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणगुणः अस्ति।

उदाहरणम् 6 : वितरणगुणस्य प्रयोगं कृत्वा 12 x 35 अभिजानन्तु।

समाधानम् : 12 x 35 = 12 x (30 +5) = 12 x 30 + 12 x 5

= 360 + 60 = 420

उदाहरणम् 7 : सरलं कुर्वन्तु : 126 x 55 + 126 x 45

समाधानम् : 126 x 55 + 126 x 45 = 126 x (55 + 45) = 126 x 100

= 12600

प्रयत्नं कुर्वन्तु

वितरण-गुणस्य प्रयोगं कृत्वा 15 x 68, 17 x 23 अपि च 69 x 78 + 22 x 69 एतासां सङ्क्रियाणां फलं जानन्तु।

तत्समकः अवयवः (योगस्य अपि च गुणनस्य कृते)

पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः प्राकृतसङ्ख्यानां सङ्ग्रहणात् कथं भिन्नः अस्ति ? भिन्नता तु केवलं पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहे 'शून्यस्य' उपस्थितिमात्रेण अस्ति। योगे तु 'शून्यस्य' महत्वपूर्णं पात्रम् अस्ति।

अधोलिखित-कोष्ठकं भवतां कृते शून्यस्य महत्त्वं ज्ञातुं साहाय्यं करोति।

7	+	0	=	7

5	+	0	=	5
0	+	15	=	15
0	+	26	=	26
0	+	….	=	….

यदि भवन्तः पूर्णसङ्ख्यासु शून्यस्य योगं कुर्वन्ति चेत् तर्हि फलितांशः कः भवति ?

एषा तु पुनः समाना पूर्णसङ्ख्या अस्ति । अतः 'शून्यं' पूर्णसङ्ख्यानां तत्समक-अवयवः अथवा योज्य-तत्समकः इत्युच्यते ।

गुणने अपि शून्यस्य महत्त्वं स्थानम् अस्ति । कामपि सङ्ख्यां शून्येन सह गुणनं कुर्मः चेत् फलितांशः 'शून्यम्' एव भवति ।

उदाहरणार्थम् अधोलिखितं प्रतिरूपं पश्यन्तु ।

5 x 6 = 30
5 x 5 = 25
5 x 4 = 20
5 x 3 =15
5 x 2 = …
5 x 1 = …
5 x 0 = ?

पश्यन्तु कथं गुणनफलं न्यूनं भवति इति ।
किं भवन्तः प्रतिरूपं पश्यन्तः सन्ति?
किं भवन्तः अन्तिम-चरणस्य अनुमानं कर्तुं प्रभवन्ति ?
किम् एतत् प्रतिरूपं अन्य-पूर्णसङ्ख्यानां कृते अपि सत्यम् ?
अन्येन पूर्णसङ्ख्याद्वयेन सह अस्य प्रयोगं कुर्वन्तु ।

भवन्तः पूर्णसङ्ख्यानां कृते एकं योज्य-तत्समकं प्राप्तवन्तः । पूर्णसङ्ख्यासु शून्य-योजनेन सा एव पूर्णसङ्ख्या प्राप्यते । पूर्णसङ्ख्यानां कृते गुणनात्मक-तत्समकस्य अपि स्थितिः एवमेव अस्ति । कोष्ठकं पश्यन्तु ।

7	X	1	=	7
5	X	1	=	5
1	X	12	=	12
1	X	100	=	100
1	X	….	=	….

भवतां चिन्तनं सम्यक् अस्ति । पूर्णसङ्ख्यानां गुणनस्य कृते '1' तत्समकः अवयवः अथवा गुणनात्मक-तत्समकः अस्ति ।

अभ्यासः 2.2

1. युक्ते क्रमे संस्थाप्य योगफलम् अभिजानन्तु ।
   (a) 837 + 208 + 363 (b) 1962 + 453 + 1538 + 647

2. युक्ते क्रमे संस्थाप्य गुणनफलम् अभिजानन्तु ।

(a) 2 x 1768 x 50 (b) 4 x 166 x 25

(c) 8 x 291 x 125 (d) 625 x 279 x 16

(e) 285 x 5 x 60 (f) 125 x 40 x 8 x 25

3. अधोलिखितानां सङ्क्रियाणां मूल्यम् अभिजानन्तु ।

(a) 297 x 17 + 297 x 3 (b) 54279 x 92 + 8 x 54279

(c) 81265 x 169 – 81265 x 69 (d) 3845 x 5 x 782 + 769 x 25 x 218

4. उचितैः गुणधर्मैः गुणनफलम् अभिजानन्तु ।

(a) 738 x 103 (b) 854 x 102 (c) 258 x 1008 (d) 1005 x 168

5. एकः वाहनचालकः तस्य वाहनस्य पेट्रोल्-टेंक् मध्ये सोमवासरे 40 लीटर् पेट्रोल् तैलं पूरितवान् । अग्रिमदिने सः 50 लीटर् तैलं पूरितवान् । यदि पेट्रोल्शिलातैल-मूल्यं प्रति लीटर् 44 रू. भवति तर्हि सः पेट्रोल् शिलातैलस्य कृते आहत्य कियद्धनस्य व्ययं कृतवान् ?

6. एकः क्षीरविक्रेता एकस्मै उपाहारगृहाय प्रातःकाले 32 लीटर् लीटरपरिमित-क्षीरं ददाति । अपि च सायंकाले 68 लीटर्-क्षीरं ददाति । यदि क्षीरस्य मूल्यं प्रति लीटर् 15 रू भवति तर्हि क्षीरविक्रेता प्रतिदिनं कियद्धनराशिं प्राप्नोति ?

7. संयोजयन्तु ।

(a) 425 x 136 = 425 x (6 + 30 +100) (a) गुणनस्य क्रमविनिमयता

(b) 2 x 49 x 50 = 2 x 50 x 49 (b) योगस्य क्रमविनिमयता

(c) 80 + 2005 + 20 = 80 + 20 + 2005 (c) योगस्य उपरि गुणनस्य वितरणम्

2.5 पूर्णसङ्ख्यानां प्रतिरूपम् ।

वयं बिन्दुभिः द्वारा प्रारम्भिक-आकारैः सङ्ख्याः व्यवस्थिताः कुर्मः । वयं एतादृशान् आकारान् स्वीकुर्मः ते च (1) एका रेखा (2) एकः आयतः (3) एकः वर्गः (4) एकः त्रिभुजः इति । प्रत्येकं सङ्ख्याम् एतेषु आकारेषु एव व्यवस्थितां कुर्मः ।

- प्रत्येकं सङ्ख्याम् एकस्यां रेखायां व्यवस्थितां व्यवस्थिता कर्तुं शक्यते शक्यते ।

  सङ्ख्याम् 2 इति सङ्ख्याम् अनेन प्रकारेण दर्शयितुं शक्यते ● ●

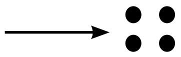
  सङ्ख्याम् 3 इति सङ्ख्याम् अनेन प्रकारेण दर्शयितुं शक्यते ● ● ●

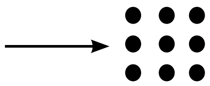
- काश्चन सङ्ख्याः आयतेन दर्शयितुं शक्यन्ते । उदाहरणार्थम् -

  सङ्ख्यां 6 इति सङ्ख्याम् आयत-रूपेण दर्शयितुं शक्यते ।

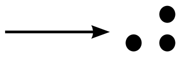
  अवधानेन पश्यन्तु अत्र 2 पङ्क्तयः 3 स्तम्भाः सन्ति ।

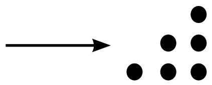
- काश्चन सङ्ख्याः यथा 4 अपि च 9 एते वर्ग-रूपेण दर्शयितुं शक्यते ।

4 

9 

काश्चन सङ्ख्याः त्रिभुजरूपेण दर्शयितुं शक्यन्ते।
उदाहरणार्थम्

3 

6 

अवधानं ददतुसावधानं परिशीलयन्तु, यत् त्रिभुजस्य भुजद्वयं अवश्यं समानं भवेत्। अधस्तात् आरम्भं कृत्वा पङ्क्तिषु बिन्दूनां सङ्ख्या 4, 3, 2, 1 इति क्रमेण भवेत्। उपरितन-पङ्क्तौ केवलं एकः एव बिन्दुः भवेत्।

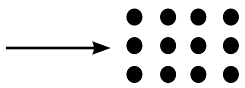
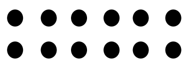
अधुना, कोष्ठकं पूरयन्तु।

1, एका विशेष-सङ्ख्या अस्ति।

सङ्ख्या	रेखा	अयतः	वर्गः	त्रिभुजः
2	आम्	न	न	न
3	आम्	न	न	आम्
4	आम्	आम्	आम्	न
5	आम्	न	न	न
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				

प्रयत्नं कुर्वन्तु

1. कासां सङ्ख्यानां दर्शनं केवलं सङ्ख्यारूपेण भवितुं शक्यते ?
2. कासां सङ्ख्यानां दर्शनं वर्गरूपेण भवितुं शक्यते ?
3. कासां सङ्ख्यानां दर्शनं आयतरूपेण भवितुं शक्यते ?
4. आदिमाः सप्त त्रिभुजाकार-सङ्ख्याः लिखन्तु। उदाहरणार्थम् 3, 6 .. इत्यादिः।
5. कासाञ्चन-सङ्ख्यानां दर्शनं आयताकारद्वयेन कर्तुं शक्यते। उदाहरणार्थम् 12

12  अथवा 

3 x 4 2 x 6

अनेन प्रकारेण न्यूनातिन्यूनं पञ्च-उदाहरणानि दीयताम्।

प्रतिरूपाणां निरीक्षणम्

प्रतिरूपाणां निरीक्षणेन भवन्तः प्रक्रियाणां सरलीकरणार्थं मार्गदर्शनं प्राप्तुं शक्नुवन्ति।

अधोलिखितानां अध्ययनं कुर्वन्तु।

(a) 117 + 9 = 117 + 10 – 1 = 127 – 1 = 126

(b) 117 – 9 = 117 – 10 + 1 = 107 + 1 = 108

(c) 117 + 99 = 117 + 100 – 1 = 217 – 1 = 216

(d) 117 – 99 = 117 – 100 + 1 = 17 + 1 = 18

किम् एतत् प्रतिरूपं 9, 99, 999, ... इत्यादि सङ्ख्यानां योजने अथवा व्यवकलने भवतां साहाय्यं करोति ?

अत्र इतोऽपि एकं प्रतिरूपं पश्यन्तु।

(a) 84 x 9 = 84 x (10 – 1)

(b) 84 x 99 = 84 x (100 – 1)

(c) 84 x 999 = 84 x (1000 – 1)

किं भवतां कृते कामपि सङ्ख्यां 9, 99, 999, … इत्यादि-सङ्ख्याभिः सह गुणनं कर्तुं संक्षिप्तविधिः लभ्यते ?

भवन्तः अधोलिखितेन प्रतिरूपेण कामपि सङ्ख्यां 5, 25 अथवा 125 इत्येतैः गुणनं कर्तुं एकम् आकर्षकं विधिं प्राप्नुवन्ति।

(भवन्तः एताः सङ्ख्याः अग्रे अपि वर्धयितुं शक्नुवन्ति।)

(i) 96 x 5 = 96 x 10/2 = 960/2 = 480

(ii) 96 x 25 = 96 x 100/4 = 9600/4 = 2400

(iii) 96 x 125 = 96 x 1000/8 = 96000/8 = 12000 ....

अधोलिखितात् प्रतिरूपात् प्रतिरूपात् किं मार्गदर्शनं लभ्यते ?

(i) 64 x 5 = 64 x 10/2 = 32 x 10 = 320 x 1

(ii) 64 x 15 = 64 x 30/2 = 32 x 30 = 320 x 3

(iii) 64 x 25 = 64 x 50/2 = 32 x 50 = 320 x 5

(iv) 64 x 35 = 64 x 70/2 = 32 x 70 = 320 x 7 ....

अभ्यासः 2.3

1. अधोलिखितासु सङ्क्रियासु कया शून्यस्य निरूपणं न भवति।

   (a) 1+ 0 (b) 0 x 0 (c) $\frac{0}{2}$ (d) $\frac{10 - 10}{2}$

2. यदि द्वयोः पूर्णसङ्ख्ययोः गुणनफलं शून्यम् अस्ति तर्हि किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः मध्ये एका सङ्ख्या अथवा द्वे अपि संख्ये शून्ये एव स्तः? उदाहरणेन सह भवताम् उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

3. यदि द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलं 1 इतीयं सङ्ख्या अस्ति तर्हि किं वयं वक्तुं शक्नुमः यत् द्वयोः मध्ये एका सङ्ख्या अथवा सङ्ख्याद्वयमपि 1 एव अस्ति ? उदाहरणेन सह भवताम् उत्तरस्य पुष्टिं कुर्वन्तु।

4. वितरणविधिना अभिजानन्तु।

(a) 728 x 101 (b) 5437 x 1001 (c) 824 x 25

(d) 4275 x 125 (e) 504 x 35

5. वितरणविधिना अभिजानन्तु।

   1 x 8 + 1 = 9

   12 x 8 + 2 = 98

   123 x 8 + 3 = 987

   1234 x 8 + 4 = 9876

   12345 x 8 + 5 = 98765

   अग्रिमं चरणद्वयं लिखन्तु। किं भवन्तः वक्तुं शक्नुवन्ति यत् प्रतिरूपं कीदृशं कार्यं करोति ?

   (सङ्केतः – 12345 = 11111 + 1111 + 111 + 11 + 1)

वयं कस्मिन् विषये चर्चां कृतवन्तः ?

1. सङ्ख्याः 1, 2, 3, ... गणनार्थं वयं यासां प्रयोगं कुर्मः ताः सङ्ख्याः कृते प्राकृतसङ्ख्याः इति

कथयामः ।

2. यदि भवन्तः 1 सङ्ख्यां कयापि प्राकृतसंख्यया सह योगं कुर्वन्ति, योजयन्ति च तर्हि परवर्तिनी प्राकृतसङ्ख्या लभ्यते । यदि व्यवकलनं कुर्वन्ति तर्हि पूर्ववर्तिनी प्राकृतसङ्ख्या लभ्यते ।
3. प्रत्येकम् अपि प्राकृतसङ्ख्यायाः एका परवर्तिनी भवति । 1 सङ्ख्यां परित्यज्य प्रत्येकम् अपि प्राकृतसङ्ख्यायाः एका काचित् पूर्ववर्तिनी सङ्ख्या भवति ।
4. यदि प्राकृत-सङ्ख्यानां सङ्ग्रहे वयं 0 सङ्ख्यां योजयामः तर्हि पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहः प्राप्यते । यथा अनेन प्रकारेण 0, 1, 2, 3, …. इत्येताः सङ्ख्याः पूर्णसङ्ख्यानां सङ्ग्रहं निर्मान्ति।
5. प्रत्येकम् अपि पूर्णसङ्ख्यायाः एका परवर्तिनी भवति । 0 सङ्ख्यां परित्यज्य प्रत्येकम् अपि पूर्णसङ्ख्यायाः एका पूर्ववर्तिनी भवति ।
6. सर्वाः प्राकृतसङ्ख्याः पूर्णसङ्ख्याः अपि सन्ति । किन्तु सर्वाः पूर्णसङ्ख्याः प्राकृतसङ्ख्याः न सन्ति ।
7. वयम् एकां रेखां स्वीकुर्मः । रेखायाः उपरि एकं बिन्दुं अङ्कयामः तस्य 0 इति नामाङ्कनं कुर्मः । पुनः वयं 0 इत्यस्य समानान्तरे दूरे एकं बिन्दुं स्थापयित्वा तस्य 1 इति नामाङ्कनं कुर्मः । एवमेव अग्रे अपि समान दूररत्वे बिन्दून् स्थापयित्वा 2, 3, .. इति नामाङ्कनं कुर्मः । अनेन प्रकारेण सङ्ख्यारेखा लभ्यते यस्योपरि पूर्णसङ्ख्याः दर्शयितुं शक्यते । वयं अस्याः रेखायाः उपरि सरलतया योगं, व्यवकलनं, गुणनम् अपि च विभाजनं कर्तुं शक्नुमः ।
8. सङ्ख्यारेखायाः उपरि दक्षिणभागे चलामः चेत् अपेक्षितं योगं प्राप्नुमः, यदि वामभागे चलामः तर्हि अपेक्षितं व्यवकलनं प्राप्नुमः । शून्येन शून्यात् आरभ्य समानान्तरेण यदि पादं स्थापयामः तर्हि गुणनम् अपि प्राप्तुं शक्नुमः ।
9. द्वयोः पूर्णसंख्ययोः योगः सर्वदा एका पूर्णसङ्ख्या एव भवति । एवमेव द्वयोः पूर्णसंख्ययोः गुणनफलम् अपि एका पूर्णसङ्ख्या एव भवति । वयं कथयामः यत् पूर्णसङ्ख्याः योगस्य अपि च गुणनफलस्य अन्तर्गताः संवृताः सन्ति इति । तथा अपरञ्च, पूर्णसङ्ख्याः व्यवकलनस्य अपि च भागस्य अन्तर्गताः संवृताः न सन्ति ।

10 शून्येन विभाजनं न भवति ।

11 शून्यं पूर्णसङ्ख्यानां योगस्य तत्समक-अवयवः अथवा योज्य-तत्समकः इति वदामः । 1 सङ्ख्यां पूर्णसङ्ख्यानां गुणनस्य तत्समकः इति वदामः ।

12 भवन्तः पूर्णसङ्ख्याद्वयं केनापि क्रमेण योजयितुं शक्नुवन्ति । तथैव गुणनमपि कर्तुं शक्नुवन्ति । वयं वदामः यत् पूर्णसङ्ख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य क्रमविनिमयता अस्ति ।

13 पूर्णसङ्ख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य साहचर्यता साहचर्यम् अस्ति ।

14 पूर्णसङ्ख्यानां कृते योगस्य अपि च गुणनस्य वितरणं भवति ।

15 पूर्णसङ्ख्यानां क्रमविनिमयता, सहचर्यता अपि च वितरणगुणाः परिकलनानां सरलीकरणार्थम् उपयुज्यन्ते तथा वयं अज्ञात्वा एव एतेषाम् उपयोगं कुर्मः ।

16 सङ्ख्यानां प्रतिरूपं प्रतिरूपाणि न केवलं रुचिकराः भवन्ति अपि तु मौखिक-परिकलने प्रामुख्यं भजन्ते अपि च सङ्ख्यानां गुणान् ज्ञातुं साहाय्यं कुर्वन्ति ।